

# Correction BTS CGO Mathématiques

## Session 2010

### EXERCICE 1 : (12 points)

#### A. Loi binomiale

1° On a une série de 8 épreuves indépendantes, chacune de ces épreuve peut déboucher sur deux possibilités :

- un succès : " L'entreprise n'emploie aucun salarié" de probabilité  $p = \frac{87}{100} = 0,87$
  - un échec : " L'entreprise emploie au moins un salarié" de probabilité  $q = 1 - p = 0,13$
- donc  $X$  suit la loi binomiale de paramètres 8 et 0,87.

$$2° P(X = 8) = C_8^8 \times 0,87^8 \times 0,13^0 = 1 \times 0,87^8 \times 1 \approx 0,328$$

La probabilité que les huit entreprises emploient aucun salarié est 0,328.

$$3° P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) = C_8^7 \times 0,87^7 \times 0,13^1 + C_8^8 \times 0,87^8 \times 0,13^0 \approx 0,721$$

La probabilité qu'au moins sept entreprises n'emploient aucun salarié est 0,721.

#### B. Loi normale

##### 1° Réponse C : 0,86

*Justification (non demandée) :*

$Y$  suit la loi normale de moyenne 874 et d'écart type 10,5.

Soit  $T$  la variable aléatoire définie par :  $T = \frac{Y-874}{10,5}$  ;  $T$  suit  $N(0 ; 1)$ .

$$\begin{aligned} P(859,5 \leq Y \leq 890,5) &= P\left(\frac{859,5 - 874}{10,5} \leq \frac{Y - 874}{10,5} \leq \frac{890,5 - 874}{10,5}\right) = P\left(-\frac{29}{21} \leq Y \leq \frac{11}{7}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{11}{7}\right) - \Pi\left(-\frac{29}{21}\right) \approx \Pi(1,57) - \Pi(-1,38) = \Pi(1,57) - (1 - \Pi(1,38)) = \Pi(1,57) - 1 + \Pi(1,38) \\ &= 0,9418 - 1 + 0,9162 = 0,858 \approx 0,86 \end{aligned}$$

##### 2° Réponse A : 0,27

*Justification (non demandée) :*

$$\begin{aligned} P(Y \geq 880,5) &= P\left(\frac{Y - 874}{10,5} \geq \frac{880,5 - 874}{10,5}\right) = P\left(T \geq \frac{13}{21}\right) = 1 - \Pi\left(\frac{13}{21}\right) \approx 1 - \Pi(0,62) = 1 - 0,7324 \\ &= 0,2676 \approx 0,27 \end{aligned}$$

#### C. Etude d'une suite

1° Augmenter un nombre de 20% revient à le multiplier par  $1 + \frac{20}{100} = 1,2$

Ainsi, la capacité mondiale prévue pour 2009 est :  $120\,791 \times 1,2 = 144\,949,2$  MW

La capacité mondiale prévue en 2010 est :  $144\,949,2 \times 1,2 = 173\,939,04$  MW

2° a) La suite  $(u_n)$  est une suite géométrique car on multiplie par 1,2 pour passer d'un terme au suivant.

Autrement dit : on a pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 1,2u_n$

$$b) u_n = u_0 \times q^n = 120\,791 \times 1,2^n$$

##### 3° a)

$$(1,2)^p \geq \frac{250\,000}{120\,791}$$

$\ln((1,2)^p) \geq \ln\left(\frac{250\,000}{120\,791}\right)$  car  $\ln$  est une fonction croissante

$$p \ln(1,2) \geq \ln \frac{250\,000}{120\,791}$$

$$p \geq \frac{\ln \frac{250\,000}{120\,791}}{\ln(1,2)} \approx 3,99 \quad \text{car } \ln(1,2) > 0$$

Le plus petit entier  $p$  vérifiant  $(1,2)^p \geq \frac{250\,000}{120\,791}$  est 4.

**b)**

$$u_n \geq 250\,000 \text{ équivaut à } 120\,791 \times 1,2^n \geq 250\,000 \text{ donc } 1,2^n \geq \frac{250\,000}{120\,791}$$

Or, d'après la question a) cette inéquation admet pour solution  $n \geq 4$ .

Ainsi à partir de l'année 2012 (= 2008 + 4) la capacité mondiale de production d'énergie éolienne dépassera 250 000 MW.

## EXERCICE 2 : (8 points)

### A. Etude d'une fonction

**1° a)** On a  $f(x) = 3x + 14 - 12 \ln(2x)$

On rappelle que  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$  ; ici  $\ln(2x)$  est de la forme  $\ln u$  avec  $u = 2x$  et donc  $u' = 2$

La dérivée de  $\ln(2x)$  est donc  $\frac{2}{2x}$

$$\text{On a donc : } f'(x) = 3 - 12 \frac{2}{2x} = 3 - 12 \frac{1}{x} = 3 - \frac{12}{x}$$

**b)** On a  $f'(x) = 3 - \frac{12}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{12}{x} = \frac{3x-12}{x}$

**c)**  $f'(x)$  a le même signe que  $3x - 12$  car sur  $[1 ; 13]$   $x$  est toujours strictement positif.

Signe de  $3x - 12$  : on résout l'inéquation  $3x - 12 \geq 0$  ;  $3x \geq 12$  ;  $x \geq \frac{12}{3}$  donc  $x \geq 4$ .

Ainsi  $f'(x)$  est négatif sur  $[1 ; 4]$  et  $f'(x)$  est positif sur  $[4 ; 13]$

**d)**

$x$	1	4	13
Signe de $f'(x)$	-	○	+
Variations de $f$	$17 - 12 \ln 2$	$26 - 12 \ln 8$	$53 - 12 \ln 26$

**2°** Voir annexe pour les constructions.

On lit environ : 1,8 et 7,5.

### B. Calcul intégral

**1°**  $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 26x - 12x \ln(2x)$

Il s'agit de calculer  $F'(x)$ .

$12x \ln(2x)$  est de la forme  $uv$  avec  $u = 12x$  et  $v = \ln(2x)$  et donc  $u' = 12$  et  $v' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$ .

$$F'(x) = \frac{3}{2}2x + 26 - (u'v + uv') = 3x + 26 - \left(12 \ln(2x) + 12x \times \frac{1}{x}\right) = 3x + 26 - 12 \ln(2x) - 12$$

$$= 3x + 14 - 12 \ln(2x) = f(x).$$

Ainsi  $F$  est une primitive de  $f$ .

**2°**  $I = \int_1^{13} f(x) dx = [F(x)]_1^{13} = \left[ \frac{3}{2}x^2 + 26x - 12x \ln(2x) \right]_1^{13}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \times 13^2 + 26 \times 13 - 12 \times 13 \ln(2 \times 13) - \left( \frac{3}{2} + 26 - 12 \ln(2) \right) \\
&= \frac{507}{2} + 338 - 156 \ln(26) - \frac{3}{2} - 26 + 12 \ln(2) \\
&= 564 - 156 \ln(26) + 12 \ln(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3^\circ V_m &= \frac{1}{13-1} \int_1^{13} f(x) dx = \frac{1}{12} I = \frac{1}{12} (564 - 156 \ln(26) + 12 \ln(2)) = 47 - 13 \ln(26) + \ln(2) \\
V_m &\approx 5,3
\end{aligned}$$

*D. Application de la partie A (Remarque : Il n'y a pas de partie C)*

**1° a)** D'après la question 1°d) de la partie A, la fonction  $f$  admet son minimum pour  $x = 4$ .

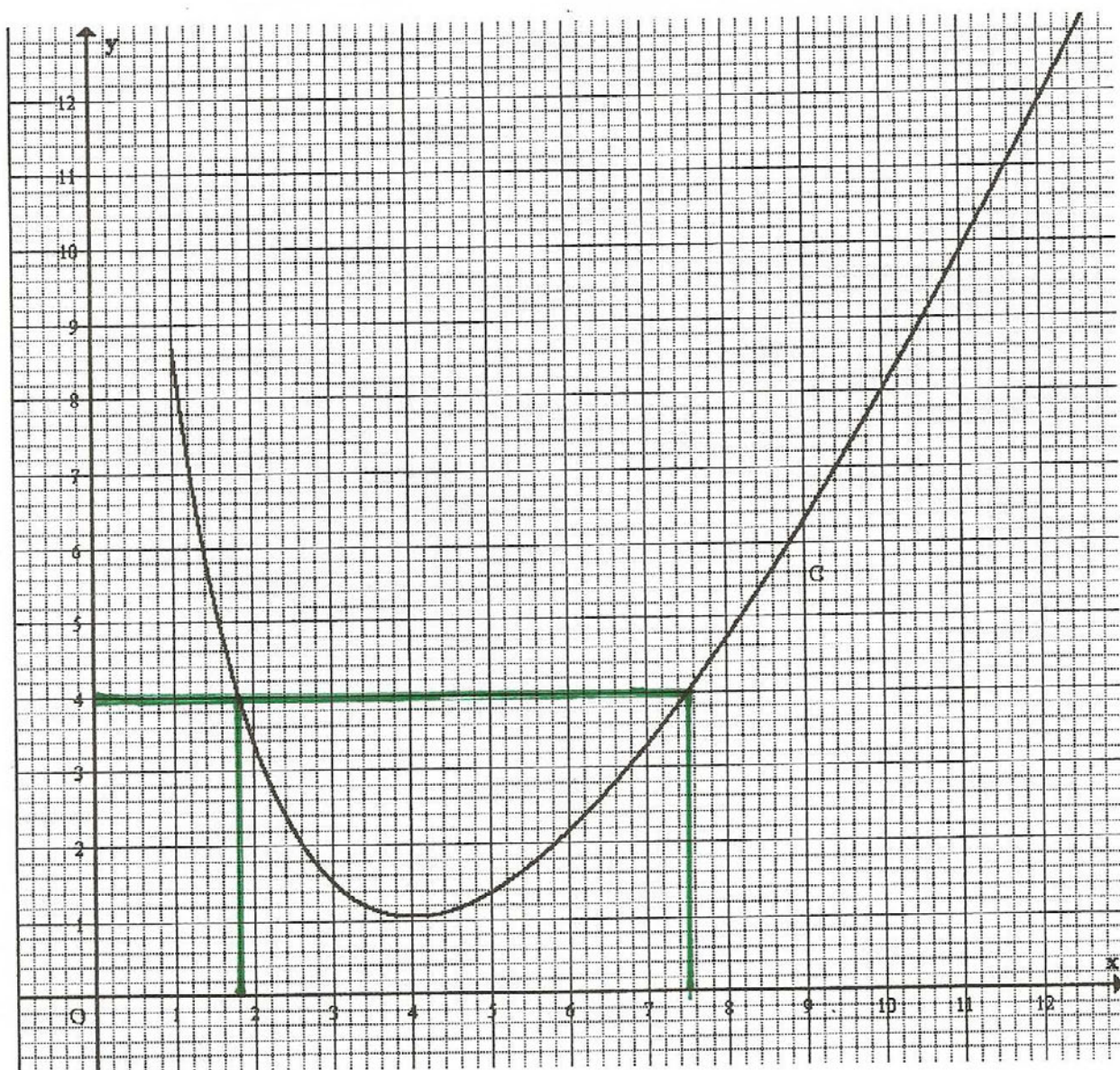
Ainsi, il faut fabriquer 400 objets pour que le coût moyen soit minimal.

**b)** Ce coût moyen est alors de :  $f(4) = 26 - 12 \ln 8 \approx 1,05$  euros.

**2°** D'après la question 2° de la partie A, les solutions de l'équation  $f(x) = 4$  sont environ 1,8 et 7,5.

Ainsi, pour que le coût moyen soit inférieur ou égal à 4 euros il faut un nombre d'objets à fabriquer compris entre 180 et 750 (inclus).

# Annexe à rendre avec la copie



BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS	SESSION 2010
DUREE : 2 h.	Coefficient 2
CGMAT	MATHEMATIQUES page 5/5

N<sup>o</sup>  
 .../...