BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

COMPTABILITE GESTION

Mathématiques

Durée : 2 heures **Coefficient : 2**

- La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage des instruments de calcul est autorisé.
- Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
- Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5, dont une annexe à rendre avec la copie (numérotée 5/5) .

Exercice 1 : (10 points)

Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit. Elle étudie la demande pour ce nouveau produit, afin d'essayer de déterminer le prix de vente qui lui permettra d'obtenir la plus grande recette possible.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Etude statistique

Pour cette partie, dans les questions 2° et 3°, on utilisera les fonctions de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas demandé.

Dans le tableau suivant, figure une partie des résultats d'une enquête réalisée pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels de ce nouveau produit en fonction de son prix de vente.

Prix de vente en F : x_i	200	250	300	350	450	500
Nombre d'acheteurs potentiels : y_i	632	475	305	275	266	234

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points.
On effectue le changement de variable $z_i = \ln y_i$

1° Compléter le tableau de valeurs **T1** donné sur l'annexe ; les valeurs de z_i seront arrondies à 10^{-3} près.

2° Donner une valeur approchée à 10^{-2} près, du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (x_i, z_i).
Le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.

3° Donner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de z en x, sous la forme $z = ax + b$ (a sera donné à 10^{-4} près par excès et b à 10^{-2} près par excès).

4° En déduire une estimation du nombre d'acheteurs potentiels y, en fonction de x, sous la forme $y = k\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où k et λ sont des constantes (k sera arrondi à l'entier le plus proche).

5° Utiliser cette estimation pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels, si le prix de vente est fixé à 400F.

Partie B : Etude d'une fonction

En vue d'une interprétation économique qui sera effectuée dans la partie C, on considère la fonction définie sur l'intervalle $I = [200\,;500]$ par $f(x) = 950\,x\,\mathrm{e}^{-0{,}003x}$.

1° On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout x élément de I, $f'(x) = 950\,(1 - 0{,}003\,x)\,\mathrm{e}^{-0{,}003\,x}$.

2° Déterminer le sens de variation de la fonction f.

3° Compléter le tableau **T2** donné sur l'annexe.
Construire, dans le repère donné sur l'annexe, la courbe représentative de f.

Partie C : Optimisation de la recette potentielle

On suppose, dans cette question, qu'une estimation du nombre d'acheteurs potentiels est $y = 950\,\mathrm{e}^{-0{,}003\,x}$.

1° Montrer qu'une estimation de la recette en francs, en fonction du prix de vente x, est $f(x) = 950\,x\,\mathrm{e}^{-0{,}003\,x}$.

2° En déduire une valeur approchée, arrondie au franc près, du prix de vente pour lequel la recette est maximale.
Quel est, arrondi au millier de francs près, le montant de cette recette ?

3° Déterminer graphiquement pour quelles valeurs du prix de vente x la recette est supérieure à 111000 F.

Exercice 2 : (10 points)

Dans une entreprise, un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de gestion a été suivi par 25 % du personnel. Ainsi, la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans l'entreprise ait suivi ce stage est $p = 0{,}25$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A :

On choisit au hasard n personnes de cette entreprise. On suppose l'effectif suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

1° Dans cette question, $n = 10$.
On note X la variable aléatoire qui, à tout ensemble de 10 personnes ainsi choisies, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Indiquer les paramètres de cette loi.

b) Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité des événements suivants :
E_1 : «Parmi 10 personnes choisies au hasard, exactement 2 personnes ont suivi le stage» ;
E_2 : «Parmi 10 personnes choisies au hasard, au plus une personne a suivi le stage».

2° Dans cette question, $n = 500$.
On note Y la variable aléatoire qui, à tout ensemble de 500 personnes ainsi choisies, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0{,}25$.

a) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.
En donner une interprétation.
Déterminer une valeur approchée, arrondie à 10^{-1} près, de l'écart-type de la variable aléatoire Y.

b) On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 125 et d'écart-type 9,7.
On note Z une variable aléatoire suivant cette loi.
En utilisant cette approximation, calculer la probabilité qu'au plus 120 personnes, parmi les 500 choisies au hasard, aient suivi le stage, c'est-à-dire $P(Z \leq 120{,}5)$. Donner ce résultat à 10^{-2} près.

Partie B :

Dans cette entreprise, le personnel comprend 52 % de femmes.
L'événement F : « une personne choisie au hasard dans l'entreprise est une femme » a donc pour probabilité $P(F) = 0{,}52$.
On rappelle que 25% du personnel a suivi le stage de formation à l'utilisation du nouveau logiciel de gestion.
L'événement S : « une personne choisie au hasard dans l'entreprise a suivi le stage » a donc pour probabilité $P(S) = 0{,}25$.

Enfin, 40 % du personnel féminin de cette entreprise a suivi le stage. La probabilité conditionnelle correspondante est $P(S/F) = 0{,}4$ ou $P_F(S) = 0{,}4$.

1° Calculer la probabilité de l'événement A : « une personne choisie au hasard dans l'entreprise est une femme et a suivi le stage ».

2° Calculer la probabilité de l'événement B : « une personne choisie au hasard parmi les personnes ayant suivi le stage est une femme ».

page 5/5 manquante

"Annexe"

Informations reconstituées à partir du corrigé

Exercice 1

Partie A

Tableau de valeurs **T1**

Prix en F : p_i	200	250	300	350	450	500
$z_i = \ln y_i$	6,449	6,163				

Partie B

Tableau de valeurs **T2**

x	200	250	300	350	450	500
$f(x)$	104 000					

+ **repère** pour le tracé de la courbe représentative de f

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
B.T.S. COMPTABILITE ET GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t\to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha\, u^{\alpha-1} u'$

c) **Calcul intégral**

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) **Equations différentielles**

Equations	Solutions sur un intervalle I
$y' = ay$	$f(t) = k\mathrm{e}^{at}$

3. ***PROBABILITES*** :

a) **Loi binomiale** $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

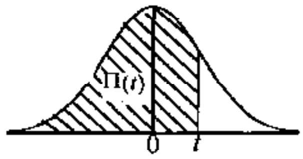
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)

$$\Pi(t) = P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$