BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
Comptabilité et Gestion des Organisations

Épreuve de MATHÉMATIQUES

SESSION 2003

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

- La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage des calculatrices est autorisé.
- Le formulaire de mathématiques est joint au sujet.

Mathématiques

La calculatrice et le formulaire de Mathématiques sont autorisés.

EXERCICE 1 :

Pour un promoteur immobilier, le coût de production, en millions d'euros, pour n villas construites, $0 \leq n \leq 40$, est donné par : $C(n) = 0{,}4\, n + 5 - 2{,}8 \ln (n + 2)$. Chaque villa est vendue 300 000 €.

Partie A :

Soit la fonction f définie sur [0 ; 40] par $f(x) = 0{,}4\, x + 5 - 2{,}8 \ln (x + 2)$.

On donne, en annexe, C la courbe représentative de f et D la droite d'équation $y = 0{,}3\, x$, dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités : 0,5 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées.

1. Déterminer, par le calcul, les variations de f et dresser son tableau de variations sur [0 ; 40].
2. Calculer l'abscisse du point A de C où la tangente Δ est parallèle à la droite D.
3. Tracer Δ sur le graphique de l'annexe.

Partie B : (à traiter à l'aide des résultats obtenus dans la partie A)

1. Combien de villas faut-il construire pour que le coût de production soit minimal ?
   Préciser le montant de ce coût minimum à 10 000 € près.
2. Déterminer graphiquement le nombre minimal de villas qu'il faut construire pour réaliser un bénéfice.
3. Utiliser le graphique pour déterminer en centaines de milliers d'euros le bénéfice maximal (On pourra utiliser la question A 2)).

Partie C :

1. Montrer que le bénéfice réalisé pour la construction et la vente de n villas est, en millions d'euros :
   $B(n) = -0{,}1\, n - 5 + 2{,}8 \ln (n + 2)$.
2. **a)** Etudier les variations de la fonction g définie sur [0 ; 40] par $g(x) = -0{,}1\, x - 5 + 2{,}8 \ln (x + 2)$ et construire son tableau de variations.

   b) Déterminer la valeur de x pour laquelle g(x) est maximal.

   c) A l'aide des graphiques fournis en annexe, justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α comprise entre 5 et 6.

   d) Donner alors le signe de g(x) suivant les valeurs de x.
3. En déduire : a) le nombre minimal de villas à construire pour que le bénéfice soit positif

   b) la valeur du bénéfice maximal à 10 000 euros près.

EXERCICE 2 : *Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près*

Une usine fabrique des cylindres en grande série.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

1. Le premier usinage consiste en un tournage. Deux machines M_1 et M_2 sont utilisées pour effectuer toutes les deux ce même travail. La production journalière de la machine M_1 est $n_1 = 1500$ pièces, avec une proportion de pièces défectueuses de $p_1 = 0,002$; pour la machine M_2, on a $n_2 = 2100$ pièces. avec $p_2 = 0,003$.

   Dans la production totale, un jour donné, on choisit au hasard une de ces pièces tournées.

   a) Montrer que la probabilité que cette pièce présente un tournage défectueux est de 0,0026.

   b) Sachant que le tournage de cette pièce est défectueux, calculer la probabilité qu'elle ait été tournée par la machine M_1.

2. Le second usinage consiste en un fraisage. L'expérience montre que, en fabrication normale, 2% de ces fraisages sont défectueux. On dispose d'un lot comprenant un très grand nombre de ces pièces fraisées dans lequel on prélève au hasard 20 pièces (le prélèvement est assimilé à un tirage successif avec remise.)

   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement au hasard de 20 pièces, associe le nombre de pièces dont le fraisage est défectueux.

   a) Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner ses paramètres. On justifiera soigneusement la réponse.

   b) Calculer la probabilité que, parmi les 20 pièces prélevées, trois aient un fraisage défectueux.

3. On tire maintenant au hasard une pièce dans un lot de pièces où les deux usinages précédents ont été réalisés. Ces deux usinages sont indépendants.

   Calculer les probabilités pour que cette pièce :

   a) présente les deux usinages défectueux,

   b) présente l'un au moins de ces usinages défectueux,

   c) ne présente aucun des usinages défectueux.

4. Sur chacun des cylindres fabriqués, on contrôle le diamètre y qui, en principe, doit être de 50,0 mm. En fait, les mesures effectuées révèlent que le diamètre de ces cylindres est une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne 50,2 mm et d'écart-type 0,5 mm.

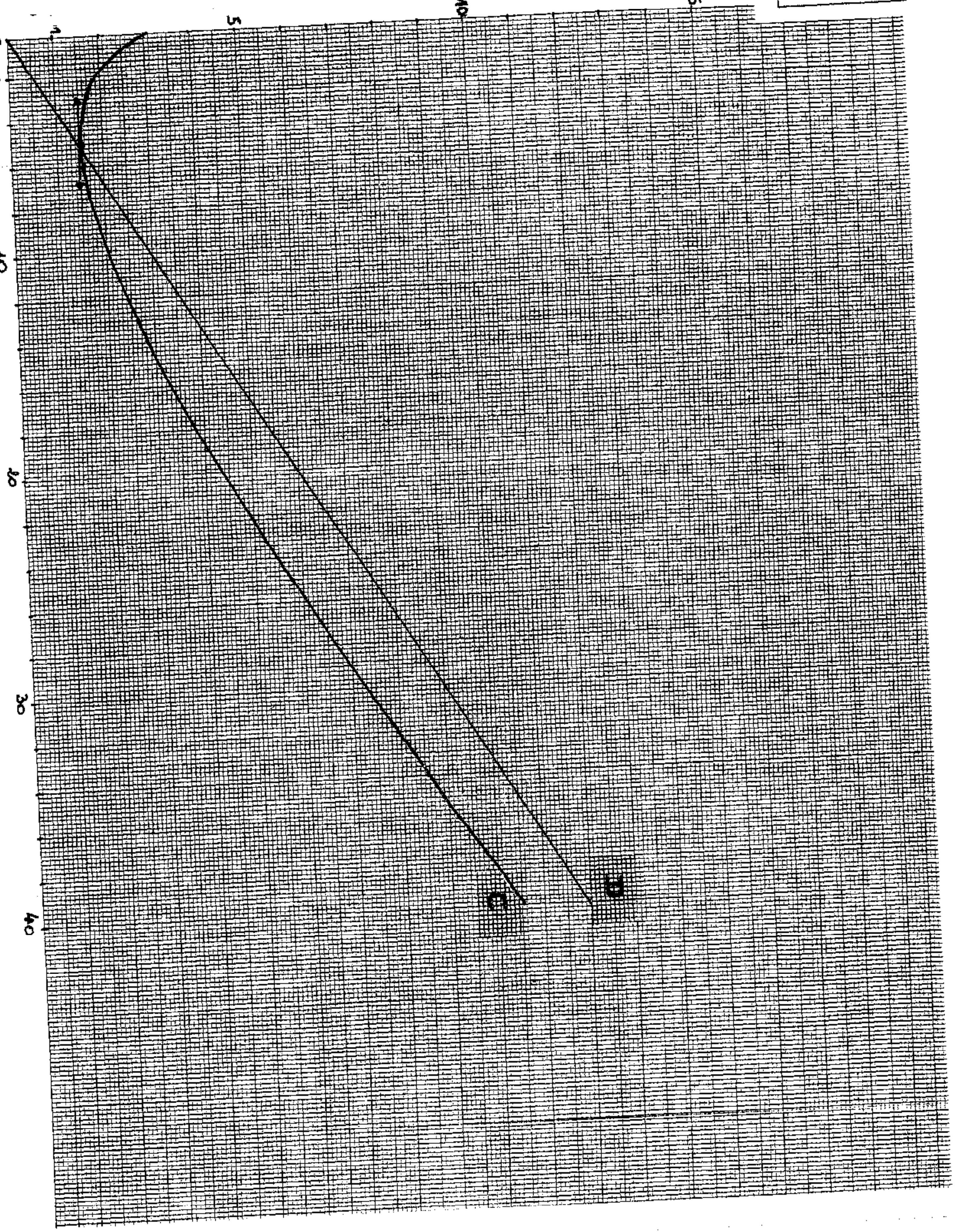
   En raison d'un montage réalisé par la suite par un robot, les cylindres dont le diamètre n'est pas compris entre 49,6 mm et 50,8 mm doivent être mis au rebut. Calculer la probabilité pour qu'un cylindre soit mis au rebut. On fera apparaître les différentes étapes du calcul.

CGMAT

N° d'anonymat

....

Annexe de l'exercice 1



FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
B.T.S. COMPTABILITE ET GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

3. *PROBABILITES :*

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

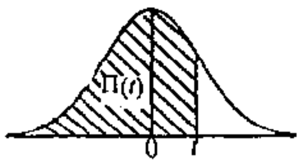
CGMAT

b) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$