SESSION 2004

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

Comptabilité et Gestion des Organisations

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

<u>Matériel et documents autorisés</u> :
L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Le sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages, numérotées de 1 à 2.

Code sujet : CGMAT

EXERCICE 1 (10 points)

A. Étude d'une fonction logistique

Soit f la fonction définie sur [0, 40] par $f(t) = \dfrac{1}{1+99\,\mathrm{e}^{-0,26t}}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$. On prendra comme unités 1 cm pour 5 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,1 sur l'axe des ordonnées.

1. a) Démontrer que, pour tout réel t de [0, 40],

$$f'(t) = \frac{25{,}74\,\mathrm{e}^{-0,26t}}{\left(1+99\,\mathrm{e}^{-0,26t}\right)^2}.$$

   b) Étudier le signe de $f'(t)$ sur [0, 40] et en déduire le tableau de variation de f.

2. a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$f(t)$									

   b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 0{,}8$.

   On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. Vérifier que, pour tout réel t de [0, 40],

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{0,26t}}{99+\mathrm{e}^{0,26t}}.$$

2. Soit F la fonction définie sur [0, 40] par : $F(t) = \dfrac{1}{0{,}26}\ln\left(99+\mathrm{e}^{0,26t}\right)$.

   Démontrer que F est une primitive de f sur [0, 40].

3. Démontrer que la valeur moyenne de f sur [30, 40] est : $V_m = \dfrac{1}{2{,}6}\ln\dfrac{99+\mathrm{e}^{10,4}}{99+\mathrm{e}^{7,8}}$.

   (On rappelle que $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$ où a >0 et b >0.)

4. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de V_m.

C. Application des résultats des parties A et B

On suppose que $f(t)$ donne le pourcentage de foyers français équipés d'un téléviseur, entre 1954 et 1994, t étant le rang de l'année à partir de 1954.

Par exemple $f(0) \approx 0{,}01$ se traduit par : en 1954, 1% des foyers étaient équipés d'un téléviseur.

$f(10) \approx 0{,}12$ se traduit par : en 1964, 12% des foyers étaient équipés d'un téléviseur.

1. Déterminer le pourcentage de foyers équipés d'un téléviseur en 1968. Même question pour 1989. Dans cette question, les valeurs approchées de $f(t)$ sont à arrondir à 10^{-3}.
2. Déduire de la partie *A.* l'année à partir de laquelle 80% des foyers ont été équipés d'un téléviseur.
3. A l'aide d'une phrase, interpréter le résultat obtenu au 4. de la partie *B*.

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique un certain type d'article électroménager.

On admet que chaque article de ce type peut présenter deux types de défauts :

- un défaut de soudure, noté défaut a,
- un défaut sur un composant électronique, noté défaut b.

A. Événements indépendants

On prélève un article au hasard dans la production d'une journée.

On note A l'événement : « l'article présente le défaut a ».

On note B l'évènement : « l'article présente le défaut b ».

On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}02$ et on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement E_1 : « l'article présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'événement E_2 : « l'article présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'événement E_3 : « l'article ne présente aucun défaut ».
4. Calculer la probabilité de l'événement E_4 : « l'article présente un seul des deux défauts ».

On admet que, si les événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants et les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

B. Loi binomiale

Dans cette partie, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Les articles sont mis en place dans des petites surfaces de distribution par lot de 25.

On prélève au hasard un lot de 25 articles dans la production d'une journée.

On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 articles.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 25 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ces 25 articles.

On suppose que la probabilité de l'événement D : « l'article est défectueux » est $P(D) = 0{,}05$.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 0)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux articles défectueux.
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux articles défectueux.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les articles sont mis en place dans les hypermarchés par lots de 800.

On prélève au hasard un lot de 800 articles dans un stock important.

On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 800 articles.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 800 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ces 800 articles.

On admet que Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(800 ; 0,05)$.

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de paramètres : $m = 40$ et $\sigma = 6$.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(40, 6)$.

1. Justifier les valeurs de m et de σ.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 41 articles défectueux dans le lot, c'est à dire calculer :

   $P(Z \leq 41,5)$. Arrondir à 10^{-2}.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = \mathrm{e}^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} \mathrm{e}^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$	$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$
$(ku)' = ku'$	$(e^u)' = e^u u'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

3. *PROBABILITES :*

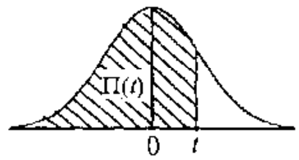
a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$