

Session 2010

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

« COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS »

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

Matériel et documents autorisés :

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

A. Loi binomiale

Dans cette partie, les probabilités sont à arrondir à 10^{-3} .

On a observé que 87% des entreprises créées en France en 2008 n'emploient aucun salarié.

On prélève au hasard huit entreprises parmi l'ensemble des entreprises créées en France en 2008. Le nombre d'entreprises créées est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de huit entreprises.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de ce type, associe le nombre d'entreprises qui n'emploient aucun salarié.

1° Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement les huit entreprises n'emploient aucun salarié.

3° Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement au moins sept des entreprises n'emploient aucun salarié.

B. Loi normale

Cette partie est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des deux questions, une seule réponse A, B, C est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

On ne demande aucune justification.

Notation :

Chaque réponse juste rapporte 1,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On appelle Y une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 874 et d'écart type 10,5.

1° La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $P(859,5 \leq Y \leq 890,5)$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
0,58	0,03	0,86

2° La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $P(Y \geq 880,5)$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
0,27	0,73	0,84

BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS	SESSION 2010
DUREE : 2 h.	Coefficient 2
CGMAT	MATHEMATIQUES
	page 2/5

C. Étude d'une suite

On se propose d'étudier l'évolution de la capacité mondiale de production d'énergie éolienne en mégawatts (MW).

On dispose des données suivantes : en 2008, cette capacité est égale à 120 791 MW.

On prévoit que cette capacité augmente de 20% chaque année à partir de 2008.

1° Déterminer les capacités mondiales prévues pour 2009 et 2010 sous cette hypothèse.

2° On note u_n la capacité mondiale de production d'énergie éolienne l'année $2008 + n$.
On a donc $u_0 = 120\,791$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n .

3° a) Déterminer le plus petit entier p tel que : $(1,2)^p \geq \frac{250\,000}{120\,791}$.

b) En déduire, en le justifiant, à partir de quelle année on peut prévoir que la capacité mondiale de production d'énergie éolienne dépassera 250 000 MW.

BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS		SESSION 2010
DUREE : 2 h.		Coefficient 2
CGMAT	MATHEMATIQUES	page 3/5

EXERCICE 2 (8 points)

A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[1, 13]$ par : $f(x) = 3x + 14 - 12 \ln(2x)$.

Sa courbe représentative C , dans un repère orthonormal est donnée en **annexe** (page 5/ 5) à rendre avec la copie.

1° On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[1, 13]$.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[1, 13]$.

b) Montrer que, pour tout x de $[1, 13]$, $f'(x) = \frac{3x-12}{x}$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[1, 13]$.

d) Construire le tableau de variation de f sur $[1, 13]$.

2° Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$

On fera apparaître sur la figure donnée en **annexe** les traits de constructions utiles et on donnera des valeurs approchées arrondies à 10^{-1} des solutions.

B. Calcul intégral

1° Soit F la fonction définie sur $[1, 13]$ par $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 26x - 12x \ln(2x)$.

Vérifier que F est une primitive de f sur $[1, 13]$.

2° On note $I = \int_1^{13} f(x) dx$.

Démontrer que $I = 564 - 156 \ln(26) + 12 \ln(2)$.

3° En déduire la valeur exacte de la valeur moyenne V_m de la fonction f sur $[1, 13]$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de V_m .

D. Application de la partie A

Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 100 et 1 300 objets identiques.

On admet que lorsque x centaines d'objets sont fabriqués, $1 \leq x \leq 13$, le coût moyen de fabrication d'un objet est $f(x)$ euros où f est la fonction qui a été définie dans la partie A.

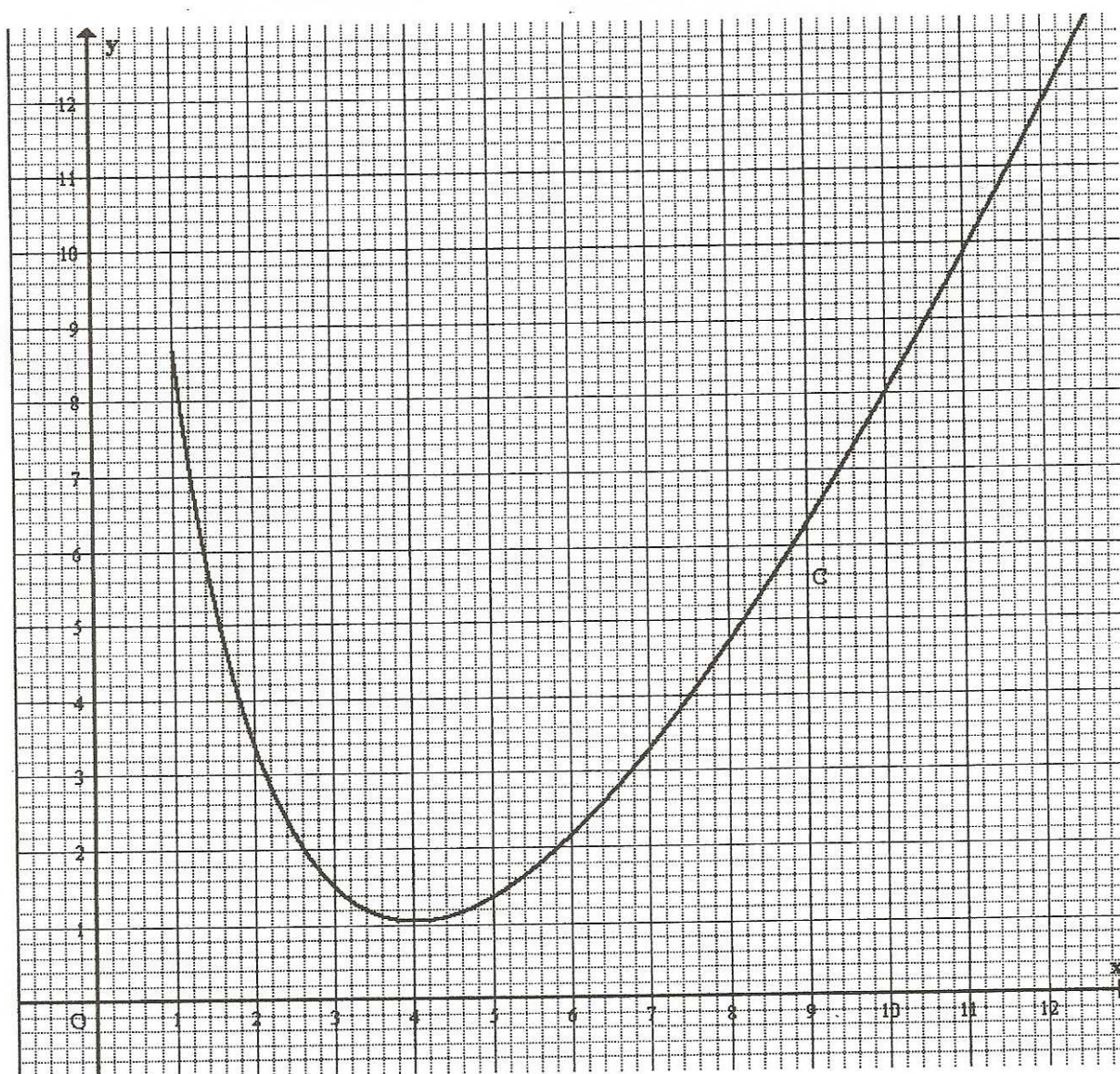
1° a) Déterminer la quantité de pièces à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal.

b) Déterminer alors ce coût moyen. Arrondir au centime d'euro.

2° Utiliser les résultats de la partie A pour déterminer les quantités d'objets à fabriquer afin que le coût moyen de fabrication d'un objet soit inférieur ou égal à 4 euros.

BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS		SESSION 2010
DUREE : 2 h.		Coefficient 2
CGMAT	MATHEMATIQUES	page 4/5

Annexe à rendre avec la copie



BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS		SESSION 2010
DUREE : 2 h.		Coefficient 2
CGMAT	MATHEMATIQUES	page 5/5

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$	$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$
$(ku)' = k u'$	$(e^u)' = e^u u'$
$(uv)' = u'v + u v'$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$	

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

3. PROBABILITES :

a) Loi binomiale $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

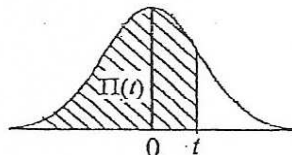
b) Loi normale

-117-

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$