Première partie : Gestion de la production

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Additions et soustractions de matrices

Ces opérations ne concernent que les matrices de même ordre. On additionne ou soustrait les éléments correspondants de chaque matrice.

$$A = \begin{matrix} -500 & 600 \\ 300 & 900 \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} -1500 & 3500 \\ 2500 & -1000 \end{matrix}$$

$$A + B = \begin{matrix} -2000 & 4100 \\ 2800 & -100 \end{matrix}$$

$$A - B = \begin{matrix} 1000 & -2900 \\ -2200 & 1900 \end{matrix}$$

1.2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire (ou nombre réel)

Soit $A = (a_{ij})$; $i = 1, 2, \ldots, m$ $j = 1, 2, \ldots, n$

Soit k un scalaire, alors $k A = (ka_{ij})$

Exemple : $5 \times \begin{matrix} 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{matrix} = \begin{matrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{matrix}$

1.2.3 Multiplication de matrices

Le produit de deux matrices A et B existe si le nombre de colonnes de la première matrice A est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice B.

$$C_{m*n} = A_{m*k} \times B_{k*n}$$

Exemple 1 : $A_{(3*2)} = \begin{matrix} 5 & 5 \\ -3 & 6 \\ 9 & 2 \end{matrix}$ $B_{(3*3)} = \begin{matrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{matrix}$

On ne peut multiplier que B*A car 3 colonnes de B = 3 lignes de A

Calculer B * A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -3 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$ = $\begin{matrix} 2*5+4*-3+8*9 & 2*5+4*6+8*2 \\ -1*5+2*-3+1*9 & -1*5+2*6+1*2 \\ 1*5+4*-3\pm 2*9 & 1*5+4*6\ -2*2 \end{matrix}$

B*A = $\begin{matrix} 70 & 50 \\ -2 & 9 \\ -25 & 25 \end{matrix}$

Exemple 2 : A $_{(2*2)}$ = $\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}$ B $_{(2*2)}$ = $\begin{matrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix}$

A*B = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 26 & 14 \\ 19 & 11 \end{matrix}$

B*A = $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 19 & 23 \\ 14 & 18 \end{matrix}$

Conclusion A*B ≠ B*A

Exemple 3 : Produit d'une matrice par une matrice colonne donne une matrice colonne

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*1+4*3+1*2 \\ 2*1+1*3+8*2 \\ 4*1+1*3+5*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Exemple 4 : Produit d'une matrice ligne par une matrice donne une matrice ligne

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 & 35 \end{pmatrix}$$

Exemple 5 : Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne donne un nombre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 17$$

Exemple 6 : Produit d'une matrice colonne par une matrice ligne donne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 9 & 12 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 7 : Produit une matrice par la matrice identité donne la même matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion: A * I = I * A = A

1.2.4 Puissance d'une matrice

A_n = A*A*…*A

Exemple : Soit A = $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et A^3 et A^{2009}

A^2 = A*A

$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = 2A$

$A^3 = A^2 * A = 2A*A = 2A^2 = 2*2A$

$A^3 = 2^2A$ donc $A^{2009} = A^{2008}A = 2^{2008}\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

