BTS cgo

Corrigé de l'épreuve de 2009

Exercice 1 — A – Evénements indépendants

A : « le bulbe présente le défaut a »
B : « le bulbe présente le défaut b »

A et B indépendants
$p(A) = 0{,}015$ $\quad$ $p(B) = 0{,}02$

1. E_1 : « le bulbe présente le défaut a et le défaut b »
   $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}015 \times 0{,}02 = 0{,}0003$ (événements indépendants)
   $P(E_1) = 0{,}0003$

2. E_2 : « le bulbe présente au moins un des deux défauts »
   $P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}015 + 0{,}02 - 0{,}0003 = 0{,}0347$
   $P(E_2) = 0{,}0347$

3. E_3 : « le bulbe ne présente aucun défaut »
   E_3 est l'événement contraire de E_2, donc : $P(E_3) = 1 - P(E_2) = 1 - 0{,}0347 = 0{,}9653$
   $P(E_3) = 0{,}9653$

B – Loi binomiale

D : une composition florale prélevée au hasard est défectueuse $P(D) = 0{,}025$
On prélève au hasard 12 compositions florales (assimilé à un tirage avec remise)
X est la variable aléatoire, qui, à tout prélèvement ainsi défini associe le nombre de compositions qui sont défectueuses.

1. On effectue un prélèvement 12 fois de suite, les épreuves sont indépendantes 2 à 2 et il y a 2 issues :
   La composition est défectueuse $p = 0{,}025$ ou elle ne l'est pas $q = 0{,}975$

   Donc X suit la loi binomiale de paramètres 12 et 0,025 $\mathcal{B}$ (12 ; 0,025)

2. $P(X = 2) = C_{12}^{2}\, 0{,}025^2 \times 0{,}975^{10} \approx 0{,}032023$ (à 10^{-2} près)
   $P(X=2) \approx 0{,}03$

3. Probabilité d'avoir au plus une composition défectueuse
   $P(E) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_{12}^{0}\, 0{,}025^0 \times 0{,}975^{12} + C_{12}^{1}\, 0{,}025^1 \times 0{,}975^{11} = 0{,}975^{12} + 12 \times 0{,}025 \times 0{,}975^{11}$
   $P(E) \approx 0{,}737998 + 0{,}227076 \approx 0{,}97$ (ou 0,96)
   $P(E) \approx 0{,}97$

C – Loi normale

1. X_1 variable aléatoire, qui à toute semaine prise au hasard dans une année, associe la demande en kg d'engrais de type C_1. X_1 suit $\mathcal{N}$ (160 ; 32)
   On pose $T_1 = \dfrac{X - 160}{32}$, T_1 suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$ $X_1 = 32T_1 + 160$
   $P(X_1 < 200) = P(32T_1 + 160 < 200) = P(32T_1 < 40) = P(T_1 < 1{,}25) = \Pi(1{,}25) \approx 0{,}8944$
   $P(X_1 < 200) \approx 0{,}8944$

2. X_2 variable aléatoire qui à toute semaine associe la demande en kg de l'engrais C_2 $\quad X_2$ suit $\mathcal{N}$ (77 ; 28)
   $Y = X_1 + X_2$

   $m = 237$
   $\sigma \approx 42{,}52$

   a) $m = m_1 + m_2 = 160 + 77 = 237$
   $\sigma = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{32^2 + 28^2} = \sqrt{1808} \approx 42{,}52$(car les var indépendantes)

   b) $P(Y > 340) = 1 - P(Y < 340)$
   On calcule $P(Y < 340)$. On pose $T = \dfrac{Y - 237}{42{,}52}$, T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}$ (0 ; 1)
   $P(Y < 340) = P(42{,}52T + 237 < 340) = P(42{,}52T < 103) = P(T < 2{,}42238) \approx \Pi(2{,}42) \approx 0{,}9922$
   Ou $\Pi(2{,}42) \approx 0{,}9922$ et $\Pi(2{,}43) \approx 0{,}9925$ donc $P(Y < 340) \approx 0{,}99226$
   $P(Y > 340) \approx 1 - 0{,}99226 \approx 0{,}0078$
   $P(Y < 340) \approx 0{,}01$

   c) L'entreprise a raison de limiter le stockage à 340 kg, car la probabilité d'avoir une demande supérieure à ce nombre est très faible

Exercice 2

$f(x) = \dfrac{10}{\ln(2x+3)}$ sur l'intervalle [1 ; 10]

A Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) < 3{,}5$, sont les abscisses des points de la courbe ayant une ordonnée inférieure ou égale à 3,5

$\boxed{\mathbf{S = [\,7{,}2\ ;\ 10]}}$

B g définie sur [0 ; 10] par $g(x) = 5 - e^{-0,2x+1}$

1. a) $g'(x) = 0{,}2\, e^{-0,2x+1}$

b) 0,2 et $e^{-0,2x+1}$ sont positifs, donc : $g'(x)$ est positive (et g croissante)

$\boxed{\mathbf{g'(x) > 0}}$

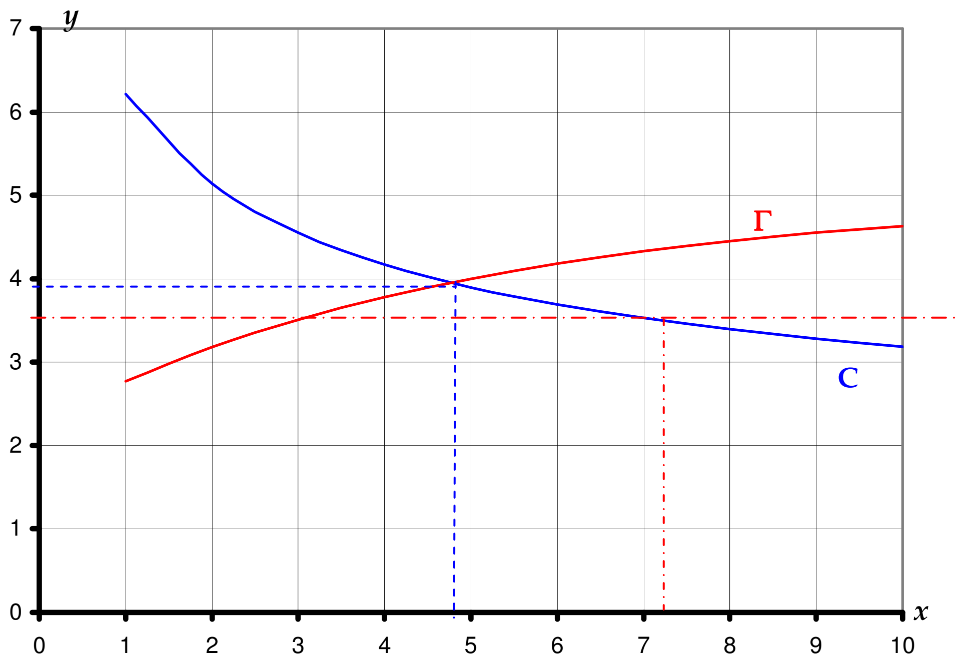
2.

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
g	$5 - e^{0,8}$ ↗	$5 - e^{-1}$

3. a)

x	1	2	3	4	5	6	8	10
$g(x)$	2,77	3,18	3,51	3,78	4	4,18	4,45	4,63

b)



4. L'équation $f(x) = g(x)$ a pour solution l'abscisse du point d'intersection des deux courbes :

$\boxed{\mathbf{x \approx 4{,}8}}$

C

1. Soit G définie sur [1 ; 10] par : $G(x) = 5x + 5\, e^{-0,2x+1}$

$G'(x) = 5 - 5 \times 0{,}2 \times e^{-0,2x+1} = 5 - e^{-0,2x+1} = G(x)$

G est donc une primitive de g sur [1 ; 10]

2. a) $V_m = \dfrac{1}{10-1}\displaystyle\int_1^{10} g(x)\,dx = \dfrac{1}{9}\Big[5x + 5e^{-0,2x+1}\Big]_1^{10} = \dfrac{1}{9}\Big[50 + 5e^{-2+1} - 5 - 5e^{-0,2+1}\Big]$

$\boxed{\mathbf{V_m = \frac{1}{9}\left[45 + 5e^{-1} - 5e^{0,8}\right]}}$

b) $V_m \approx$ 1/9 (35,712)

$\boxed{\mathbf{V_m \approx 3{,}97}}$

D

1. **d(x) < 3500 lorsque x > 72 €**

2. a) Prix d'équilibre si $f(x) = g(x)$ **soit environ 48 €**

b) $g(4{,}8) = 3{,}95918$ (4000 tonnes)

La demande est d'environ 3959 tonnes