Correction BTS CGO Mathématiques 2011

Exercice 1 :

A. Evénements indépendants, probabilités conditionnelles

1°) $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ car A et B sont indépendants
$\boldsymbol{P(E_1)} = 0{,}02 \times 0{,}03 = \mathbf{0{,}0006}$

2°) E_2 correspond à : soit le défaut "a" soit le défaut "b" soit les deux défauts donc $E_2 = A \cup B$
$\boldsymbol{P(E_2)} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}02 + 0{,}03 - 0{,}0006 = \mathbf{0{,}0494}$.

3°) E_3 est le contraire de E_2 donc : $\boldsymbol{P(E_3)} = 1 - P(E_2) = 1 - 0{,}0494 = \mathbf{0{,}9506}$.
Autre méthode : $P(E_3) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0{,}98 \times 0{,}97 = 0{,}9506$

4°) $P_{E_2}(E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$ or $E_1 \cap E_2 = E_1$ *(car dans "être défectueux et avoir les deux défauts", "être défectueux" est inutile donc cela est équivalent à "avoir les deux défaut" autrement dit E_2 est inclus dans E_1).*

$$\boldsymbol{P_{E_2}(E_1)} = \frac{P(E_1)}{P(E_2)} = \frac{0{,}0006}{0{,}0494} \approx \mathbf{0{,}0121}$$

B. Loi binomiale

1°) On a une série de $n = 40$ prélèvements indépendants, chacun pouvant déboucher sur deux possibilités : "le sachet est défectueux" (succès) de probabilité $p = 0{,}05$; et "le sachet n'est pas défectueux" (échec) de probabilité $q = 1 - p = 0{,}95$.
Donc **$\boldsymbol{X}$ suit la loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n = 40}$ et $\boldsymbol{p = 0{,}05}$**.

2°) $P(X = 2) = C_{40}^{2} \times 0{,}05^2 \times 0{,}95^{38} \approx \mathbf{0{,}2777}$

3°) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{40}^{0} \times 0{,}05^0 \times 0{,}95^{40} \approx \mathbf{0{,}8715}$

C. Loi Normale

1°) Soit $T = \frac{Y-120}{8}$, T suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.

$$P(Y \geq 104) = P\left(\frac{Y-120}{8} \geq \frac{104-120}{8}\right) = P(T \geq -2) = 1 - \Pi(-2) = 1 - \big(1 - \Pi(2)\big)$$
$$= \Pi(2) = \mathbf{0{,}9772}$$

On a utilisé les formules : $P(T \geq a) = 1 - \Pi(a)$ *et* $\Pi(-a) = 1 - \Pi(a)$

2°) Calculons d'abord la probabilité que la masse soit dans l'intervalle $[104\,;136]$:

$$P(104 \leq Y \leq 136) = P\left(\frac{104-120}{8} \leq \frac{Y-120}{8} \leq \frac{136-120}{8}\right) = P(-2 \leq T \leq 2)$$
$$= 2\Pi(2) - 1 = 2 \times 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$

On a utilisé la formule : $P(-a \leq T \leq a) = 2\,\Pi(a) - 1$.
La probabilité que le sachet soit rejeté est donc : $1 - 0{,}9544 = \mathbf{0{,}0456}$.

<u>Exercice 2 :</u>

A. Etude d'une fonction

1°) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,125t}=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 1+4,9e^{-0,125t}=1+4,9\times 0=1$.

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=1}$.

On en déduit que la courbe *C* admet une **asymptote horizontale** *D* en $+\infty$,
d'équation $y = 1$.

2°)

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$	0,17	0,28	0,42	0,57	0,71	0,82	0,90

3°) a) $f(t) = \frac{1}{1+4,9e^{-0,125t}} = \frac{u}{v}$

avec $u = 1$; $u' = 0$; $v = 1 + 4,9e^{-0,125t}$; $v' = 0 + 4,9(-0,125)e^{-0,125t} = -0,6125e^{-0,125t}$

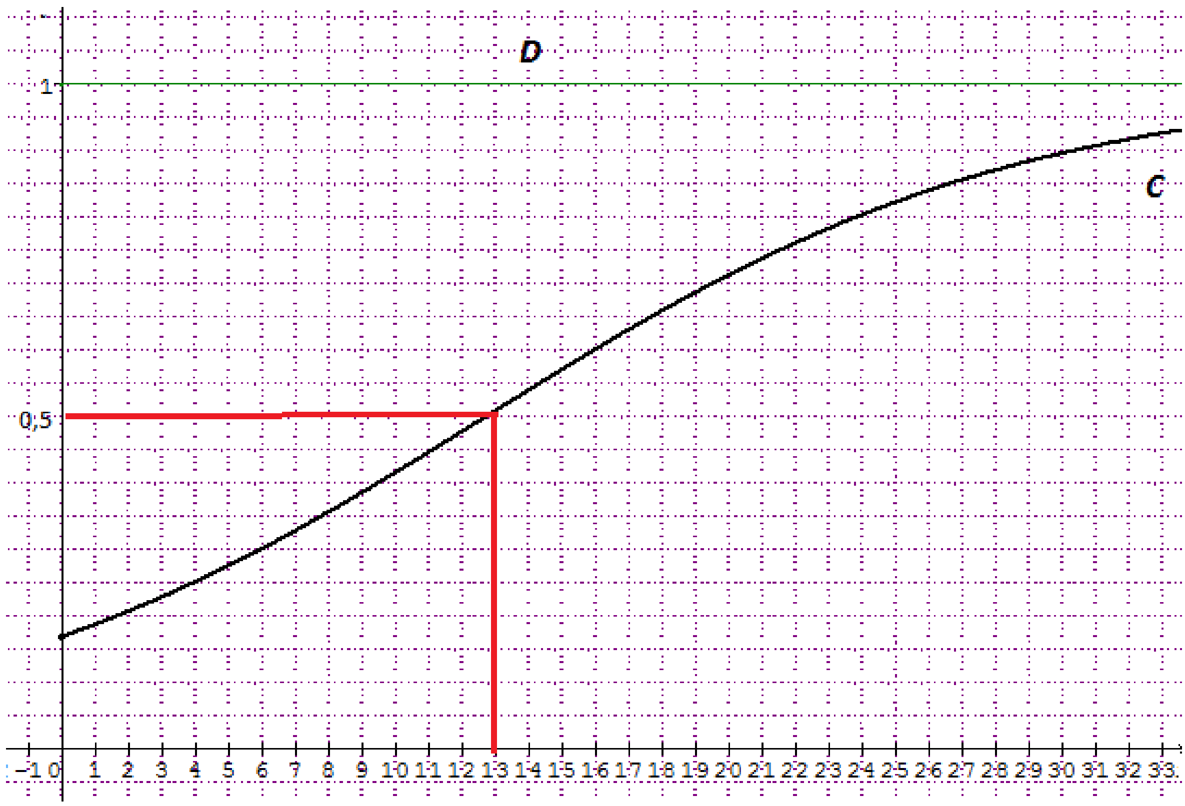
Donc $f'(t) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{0-(-0,6125e^{-0,125t})}{(1+4,9e^{-0,125t})^2} = \boldsymbol{\frac{0,6125e^{-0,125t}}{(1+4,9e^{-0,125t})^2}}$

b) $f'(t)$ est positive pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, en effet : 0,6125 est une constante positive, $e^{-0,125t}$ est positif car un exponentiel est toujours positif et $(1+4,9e^{-0,125t})^2$ est positif aussi.

On en déduit que f est **strictement croissante** sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	+	
Variations de f	$\frac{1}{5,9} \approx 0,17$ ↗	1

4°)



5°) $f(t) = 0,5$ pour $\boldsymbol{t \approx 13}$. (Tracé en rouge sur la courbe)

B. Valeur Moyenne

1°) Pour vérifier que F est une primitive de f, vérifions que $F'(t) = f(t)$:

$F(t) = 8\ln(4{,}9 + e^{0{,}125t}) = 8\ln u$ avec $u = 4{,}9 + e^{0{,}125t}$ et donc $u' = 0 + 0{,}125e^{0{,}125t} = 0{,}125e^{0{,}125t}$.

Donc $\boldsymbol{F'(t)} = 8 \times \frac{u'}{u} = 8 \times \frac{0{,}125e^{0{,}125t}}{4{,}9+e^{0{,}125t}} = \frac{e^{0{,}125t}}{4{,}9+e^{0{,}125t}} = \boldsymbol{f(t)}$.

F est bien une primitive de f.

2°) $\boldsymbol{V_m} = \frac{1}{20-10}\int_{10}^{20} f(x)dx = \frac{1}{10}[8\ln(4{,}9+e^{0{,}125t})]_{10}^{20} = \frac{1}{10}(8\ln(4{,}9 + e^{0{,}125\times 20}) - 8\ln(4{,}9 + e^{0{,}125\times 10}))$

$= \frac{8}{10}(\ln(4{,}9 + e^{2{,}5}) - \ln(4{,}9 + e^{1{,}25})) = \boldsymbol{0{,}8\ln\left(\frac{4{,}9 + e^{2{,}5}}{4{,}9 + e^{1{,}25}}\right)}$

car : $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$

3°) $V_m \approx \boldsymbol{0{,}569}$

C. Application des parties A et B

1°) $f(20) = \frac{1}{1+4{,}9e^{-0{,}125\times 20}} \approx 0{,}7132$ donc environ **71,32%** des ménages ont cet équipement en 2010.

2°) $f(t) = 0{,}50$ pour $t \approx 13$ donc **à partir de 2003** 50% des ménages sont équipés.

3°) La valeur **moyenne de ménages équipés** d'un four à micro-ondes entre 2000 et 2010 est de 0,569 soit **56,9%.**